Hovedpointer fra undervisningen i Makro I

Martin Nørgaard Petersen

3. november 2018

Noten gennemgår kapitlerne 1-9 i Introducing Advanced Macroeconomics af P.B. Sørensen og H.J. Whitta-Jacobsen. Det bemærkes, at kapitlerne 10-12 også er pensum – der henvises til bogen. Eventuel fundne fejl eller forslag til tilføjelser modtages gerne på martin@norgaardpetersen.dk

Generelle termer

Solowmodel En vækstmodel, hvor det antages, at husholdningerne opsparer en andel s af deres indkomst.

Neutralitet for teknologisk fremskridt Der nævnes i bogen tre former for teknologisk neutralitet. Når substitutionselasticiteten er 1 (Cobb-Douglas) spiller formen ingen rolle, da man blot kan definere $A_Y = A_L^{1-\alpha}$, hvorved man får, at $Y = A_Y \cdot K^\alpha L^{1-\alpha} = A_L^{1-\alpha} \cdot K^\alpha L^{1-\alpha} = K^\alpha (A_L L)^{1-\alpha}$

Hicks-neutral Man siger, at en ændring er Hicks-neutral, hvis den ikke påvirker forholdet mellem arbejdskraft og kapital: $Y = A_Y \cdot F(K,L)$, hvor produktionsfunktionen kunne være en Cobb-Douglas produktionsfunktion.

Solow-neutral Hvis teknologiske fremskridt øger effektiviteten af kapital, så effektiviteten af kapitalen øges hurtigere end den forhåndenværende kapital. Vi kan skrive $Y = F(A_K K,L)$

Harrod-neutral Hvis teknologiske fremskridt øger effektiviteten af arbejdskraften, så effektiviteten af arbejdskraften øges hurtigere end antallet af arbejdere. Man skriver $Y = F(K,A_L L)$.

Analyse af matematiske udtryk Hvis der sker en stigning $dx > 0$ i udtrykket:

$$y(x) = \frac{x}{100 + x} \Rightarrow dy = \frac{100}{(100 + x)^2} dx > 0$$

Procentvise stigninger En stigning på 1 pct. i x medfører en stigning på α pct. i y for et udtryk $y = x^\alpha$

Inada-betingelserne Inada-betingelserne er antagelser for at en produktionsfunktion udviser balanceret vækst. Givet en differentiabel funktion er disse:

1. Funktionen skal gå gennem (0,0). $f(0) = 0$.

2. Funktionen skal være konkav. Den førsteafledte skal være positiv, men den andenafledte negativ.

3. Grænseværdien for den første afledte er ∞ for x_i gående mod 0, dvs. $\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{x_i} = \infty$ (strengt taget er det tilstrækkeligt at udtrykket er større end 1)

4. Grænseværdien for den førsteafledte er 0 for x_i gående mod ∞, dvs. $\lim_{x_i \to \infty} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{x_i} = 0$. (strengt taget er det tilstrækkeligt at udtrykket er mindre end 1 for, at der er skæring med 45°-linjen.)

Elasticitet Elasticiteten er et mål for forholdet mellem de relative ændringer i to variable. Denne er givet som

$$E = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dy}{y}} = \frac{dx}{dy}\frac{y}{x} = \frac{d\ln x}{d\ln y} \tag{1}$$

Som antydet kan vi ved hjælp af logaritmer (givet at $\ln(y)$ og x er differentiable) lette udregningen. Omskrivning er givet følgende:

$$\frac{d\ln x}{d\ln y} = \frac{d\ln x}{d\ln y}\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d\ln x}{dx}\frac{dy}{d\ln y}\frac{dx}{dy}$$

vi har givet, at $\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$ og $\frac{y}{d\ln y} = \frac{1}{\frac{d\ln y}{y}} = \frac{y}{1}$, hvorved vi vi ser, at

$$\frac{d\ln x}{d\ln y} = \frac{1}{x}\frac{y}{1}\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy}\frac{y}{x},$$

hvorved det ønskede udtryk fremkommer.

Semi-elasticitet Semi-elasticiteten er et mål for den relative ændring i en variable som følge af en absolut ændring i en anden. Altså

$$\varepsilon = \frac{\frac{dy}{y}}{dx} = \frac{d\ln y}{dx}. \tag{2}$$

Sidste led fremkommer nemt, når vi indser, at $\frac{d\ln y}{dy} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow d\ln y = \frac{dy}{y}$

Overblik

Kapitel 3 – Basal teori Den basale Solowmodel for en lukket økonomi uden teknologisk fremskridt.

$$Y_t = BK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$
$$r_t = \alpha B\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1}$$
$$w_t = (1-\alpha)B\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}$$
$$S_t = sY_t$$
$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t, \qquad K_0 \text{ givet}$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ givet}$$

Modellen har følgende parametre: α, B, s, n og δ. Det gælder for alle modeller, at: $n > -1$ og $0 < \delta < 1$

Kapitel 4 – Basal teori Solowmodellen for en lille åben økonomi

$$Y_t = BK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$
$$r_t = \alpha B\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1}$$
$$w_t = (1-\alpha)B\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}$$
$$S_t = sY_t$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ givet}$$
$$V_t \equiv K_t + F_t$$
$$V_{t+1} - V_t = S_t - \delta V_t, \qquad V_0 \text{ givet}$$
$$Y_t^n \equiv Y_t + \bar{r}F_t$$

Modellen har følgende parametre: α, B, s, n,δ og $\bar{r}$.

Kapitel 5 – Eksogen vækst Den generelle Solowmodel med eksogen vækst (i teknologi)

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$$
$$r_t = \alpha\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1}$$
$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha}$$
$$S_t = sY_t$$
$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t, \qquad K_0 \text{ givet}$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ givet}$$
$$A_{t+1} = (1+g)A_t, \qquad A_0 \text{ givet}$$

Kapitel 6 – Eksogen vækst Solowmodellen med human kapital

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\sigma (A_t L_t)^{1-\alpha-\sigma}$$
$$r_t = \alpha\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{H_t}{A_t L_t}\right)^{\sigma}$$
$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha}\left(\frac{H_t}{A_t L_t}\right)^{\sigma} A_t$$
$$K_{t+1} - K_t = s_K Y_t - \delta K_t, \qquad K_0 \text{ givet}$$
$$H_{t+1} - H_t = s_H Y_t - \delta H_t, \qquad H_0 \text{ givet}$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ givet}$$
$$A_{t+1} = (1+g)A_t, \qquad A_0 \text{ givet}$$

Kapitel 7 – Eksogen vækst Solowmodellen med begrænsede naturresourcer (olie og jord)

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^\beta X^\kappa E_t^\epsilon, \quad \alpha+\beta+\kappa+\epsilon = 1$$
$$K_{t+1} - K_t = sY_t - (1-\delta K_t), \qquad K_0 \text{ givet}$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ givet}$$
$$A_{t+1} = (1+g)A_t, \qquad A_0 \text{ givet}$$
$$R_{t+1} = R_t - E_t$$
$$E_t = s_E R_t$$

Hertil kommer faktoraflønninger (r_t, w_t og v_t) = grænseprodukter af første ligning samt olieprisen u_t = grænseprodukt for E_t
Vi har givet, at $\alpha > 0, \beta > 0, \kappa > 0, \epsilon > 0$

Kapitel 8 – Endogen vækst Model med produktive eksternaliteter og endogen vækst

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$$
$$A_t = K_t^\phi$$
$$K_{t+1} - K_t = sY_t - (1-\delta K_t), \qquad K_0 \text{ givet}$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ givet}$$

Kapitel 9 – Endogen vækst Model med R&D-baseret endogen vækst

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_{Yt})^{1-\alpha}$$
$$A_{t+1} - A_t = \rho A_t^\phi L_{At}^\lambda, \qquad A_0 \text{ givet}$$
$$K_{t+1} - K_t = sY_t - (1-\delta K_t), \qquad K_0 \text{ givet}$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \qquad L_0 \text{ givet}$$
$$L_{Yt} + L_{At} = L_t$$
$$L_{At} = s_R L_t$$

Modellen har følgende tekniske parametre $\alpha, \rho, \phi, \lambda$ og δ samt adfærdsparametre: s_R, s og n.

Makroøkonomi på kort og lang sigt (kap. 1)

Det lange sigt er beskrevet ved:

1. at de væsentligste eksogene parametre udvikler sig jævnt.
2. at priserne er fuldt tilpassede i overensstemmelse med økonomiens langsigtede prisfleksibilitet: Ingen nominelle løn- og prisstivheder
3. at de økonomiske agenters forventninger er korrekte.
4. at produktionen er bestemt fra udbudssiden, som det der kan produceres med naturligt udnyttede ressourcer.

Ad. 2 Hvis den langsigtede prisfleksibiltet var kendetegnet ved fuldkommen konkurrence, ville der være clearing på arbejdsmarkedet (ingen arbejdsløshed). Dette behøver imidlertid ikke være tilfældet, da der kan således være langsigtede *reale* pris- og lønstivheder som følge af store pris- og lønfastsættende aktører.

Arbejdskraften (og andre parametre) vil dog være udnyttet til det *naturlige* niveau.

Naturligt/strukturelt niveau

Det niveau som færdigtilpassede relative priser på økonomiens markeder indebærer.

Modeller

To typer af modeller:

Statistiske énperiode-modeller

Klassisk makromodel, hvor man forestiller sig, at alle tilpasninger er skete. (eks. strukturel ledighed)

Dynamiske model (eller vækstmodel)

Model som inddrager kapitalakkumulationen (og vækst i andre parametre) eksplicit. Kurset fokuserer på Solow vækstmodeller.

Fakta om velstand og vækst (kap. 2)

Hypotese om absolut konvergens

På lang sigt vil BNP pr. arbejder konvergere mod en og samme vækstbane i alle lande, så alle lande konvergere mod samme niveau af indkomst pr. arbejder.

Det medfører, at lande med relativ lav BNP pr. arbejder ved et initialt givet tidspunkt vil have relativ stor vækst, samt fattigdom ville forsvinde af sig selv.

Hypotesen er blevet afvist, blandt andet af Brad DeLong i 1988.

Hypotese om betinget konvergens

Et lands indkomst pr. arbejder konvergerer mod en lande-specifik langsigtet vækstbane, som er givet ved de basale strukturelle egenskaber for landet. Jo længere under vækstbanen landet begynder, desto hurtigere vil landet vækste. Indkomst pr. arbejder konvergerer således mod samme niveau, betinget på at landene er strukturelt ens.

Man mener at kunne påvise en negativ sammenhæng mellem initial niveau for BNP pr. arbejder og vækst i samme, når man korrigerer for strukturelle egenskaber hvilket stemmer overens med hypotesen.

Hypotesen implicerer at givet de samme strukturelle egenskaber vil fattigdom disse lande imellem forsvinde.

Hypotese om klubkonvergens

Et lands indkomst pr. arbejder konvergerer mod en langsigtet vækstbane som afhænger af landets basale strukturelle karakteristika og om landet initiale niveau for BNP pr. arbejder er over eller under et vist niveau. Jo længere under vækstbanen landet starter, desto hurtigere vil det vækste. Indkomst pr. arbejder vil altså konvergere mod samme niveau på tværs af lande betinget på, at landene er strukturelt ens og at landene starter på den samme side af et givet niveau.

Dette kan tjene som forklaring på den klassiske fattigdomshjælp, da et midlertidigt tilskud til at komme over et vist niveau kan have permanente effekter.

Indkomstandele

De lande, der har haft relativ konstant positiv økonomisk vækst har tillige også haft meget konstante indkomstandele. Dette tjener som grundlag for 'loven' om konstante indkomstandele, hvor arbejdskraftens indkomst andel udgør 2/3.

Arbejdskraftens indkomstandel

Er givet som:

$$\text{Arbejdskraftens indkomstandel} = \frac{w_t L_t}{Y_t}, \tag{3}$$

hvor w_t er den gennemsnitlige reale løn. Når vi bemærker, at indkomst pr. arbejder er $y_t = \frac{Y_t}{L_t}$, kan vi omskrive udtrykket til:

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{w_t}{y_t} \tag{3a}$$

Kapitalens indkomstandel

Er givet som:

$$\text{Kapitalens indkomstandel} = r_t \frac{K_t}{Y_t} = r_t \frac{k_t}{y_t}, \tag{4}$$

hvor $k_t = \frac{K_t}{L_t}$

Piketty-pointe

Thomas Piketty forudser i 'Kapitalen i det 21. århundrede', at arbejdskraftens indkomstandel vil falde til fordel for kapitalens indkomstandel, hvilket vil medføre øget ulighed, da kapital er mere ulige fordelt end arbejdskraft.

Kapital og formue(Capital and wealth)

Kapital er produktionsapparatet, hvor formue består af summen af kapital og landets nettoaktiver i udlandet (landets aktiver i udlandet fratrukket udlandets aktiver i indlandet).

Balanceret vækst

En vækstproces følger en balanceret vækstbane, hvis

- BNP (el. indkomst pr. arbejder), forbrug og opsparing/investering per arbejder, reallønnen, og kapital-arbejdskraft ratioen alle vokser med en og samme konstante rate g.
- BNP, forbrug, opsparing/investering og kapital (formue) vokser med en konstant rate $g+n$, hvor n er vækst i beskæftigelse (kan approksimeres med befolkningstilvækst).
- Kapital-output forholdet og afkastet på kapital (formue) r_t er konstante.

Ovenstående kan benyttes som konsistenstjek for vækstmodeller. En model skal for konstante strukturelle parameter forudse, at økonomien konvergerer mod eller bevæger sig langs en langsigtet vækstbane karakteriseret ved balanceret vækst.

Kapitalakkumulering og vækst (kap. 3)

Solowmodellen

Kendetegnet ved at output er udbudsbestemt af teknologi samt mængden kapital K_t og arbejdskraft L_t. Modellens eksogene parametre er opsparingsraten s, nedslidningsraten δ og vækstraten i arbejdsstyrken n.

Der er tale om en basal model, da den ser på kapitalakkumulation som drivkraft bag vækst og ikke på teknologi (se senere kapitler). Kapitalakkumulation er givet som:

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t \tag{5}$$

Vi vil betragte modellen for en lukket økonomi beskrevet for diskret tid. Der er tre markeder: Output, arbejdskraft og kapital og ét aktiv: realkapital.

Markedet for output

- Udbuddet udgøres af virksomhedernes produktion
- Efterspørgsel fra husholdninger og virksomheder er $C_t + I_t$
- Indkomsten kan bruges til enten forbrug eller investering.

Markedet for kapital

En fortolkning af dette er, at forbrugerne ejer kapital og *lejer* den ud til virksomhederne til den reale lejesats, r_t. Real-renten er så $\rho_t = r_t - \delta_t$, altså real lejesats fratrukket nedslidningsraten.

En alternativ fortolkning er at virksomhederne selv besidder den. De finansierer den gennem lån med realrenten ρ_t og bærer selv afskrivningen δ_t. Altså usercost på $r_t = \rho_t + \delta_t$.

Markedet for arbejdskraft

Udbud fra husholdninger L_t (arbejdsstyrken). Den relative pris på arbejde er reallønen w_t.

Der er fuld konkurrence på markederne, hvilket sikrer fuld ressourceudnyttelse og at virksomhedernes efterspørgsel efter arbejdskraft og kapital er lig udbuddet og husholdningernes efterspørgsel er lig udbuddet af output.

Produktionssiden

Vi betragter økonomien som om al produktion kommer fra én profitmaksimerende virksomhed. Der er konstant skalaafkast til de to produktionsfaktorer:

Konstant skalaafkast Der følger af **replikeringsargumentet**, at

$$F(\lambda K^d,\lambda L^d) = \lambda F(K^d,L^d) \tag{6}$$

Niveauerne for udbuddet af kapital og arbejdskraft er prædeterminerede (jf. (5)). De profitmaksimerende betingelser er:

$$F'_K(K,L) = r_t \text{ og } F'_L(K,L) = w_t, \tag{7}$$

altså bestemmes realrenten og reallønnen fra udbudssiden.

Vi kan deraf vise at hver enkelt faktors indkomstandele er bestemt af produktionsfunktionens elasticitet:

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{F'_L \cdot L_t}{F(K,L)} \text{ og } \frac{r_t K_t}{Y_t} = \frac{F'_K \cdot K_t}{F(K,L)} \tag{8}$$

Vi har empirisk set at lønandelen udgør 2/3, og er stort set konstant. Derfor anvender vi en CES-funktion, nærmere bestemt Cobb-Douglas, da eksponenterne skal summe til 1.

Antager vi, at produktionsfunktionen er givet $F(K_t,L_t) = B_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ finder vi, at:

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = 1 - \alpha \text{ og } \frac{r_t K_t}{Y_t} = \alpha \tag{9}$$

Transitionsligningen

Anvend den intertemporale budgetrestriktion, indsæt og find $k_{t+1} = K_{t+1}/L_{t+1}$. Da får man:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}(sBk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t) \tag{10}$$

Transitionsproces Intuitionen bag transitionsprocessen er, at for $0 < k_0 < k^\star$ vil der opspares mere end kompensationskravet som følger af udtynding og nedslidning af kapital. Kapitalakkumulationen betyder, at kapital pr. arbejder og derigennem indkomst pr. arbejder stiger i næste periode. Når indkomst pr. arbejder stiger, øges opsparingen, hvilket øger kapital pr. arbejder, osv. Fordi kompensationskravet vokser proportionelt med k_t, men væksten i opsparingen aftager pga. aftagende marginalprodukt til kapital, vil der forekomme en konvergens til en steady state-værdi. Der gælder modsat, hvis $k_0 > k^\star$.

Solowligningen

Find differencen $k_{t+1} - k_t$ i ligning (10):

$$\begin{aligned}
k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+n}(sBk_t^\alpha + (1-\delta)k_t) - k_t \\
&= \frac{1}{1+n}(sBk_t^\alpha + (1-\delta)k_t - (1+n)k_t) \\
&= \frac{1}{1+n}(sBk_t^\alpha + k_t - \delta k_t - k_t - nk_t) \\
k_{t+1} - k_t &= \frac{1}{1+n}(sBk_t^\alpha - (\delta + n)k_t) \qquad (11)
\end{aligned}$$

Golden rule of saving Forbruget pr. arbejder er givet som: $c = (1-s)y_t$. En stigning i s øger kapitalakkumulationen og derved BNP pr. arbejder på lang sigt, men mindsker forbruget. Den optimale værdi af s er givet ved Golden Rule. Man finder, at det $s^{\star\star}$, der maksimerer forbrug pr. arbejder i steady state $c^\star$ er $s^{\star\star} = \alpha$.

Solowmodel for lille åben økonomi (kap. 4)

Vi antager en økonomi med frie kapitalbevægselser (men ikke fri mobilitet på arbejdskraft). Vi har tidligere antaget, at opsparing er lig investeringer, hvilket ikke længere er tilfældet. Positive fordringer F_t er udtryk for at et land er nettokreditor og vi har givet følgende relation mellem formue V_t, kapital K_t og fordringer:

$$V_t \equiv K_T + F_t$$

Da kapital ikke længere akkumuleres, har vi ingen transitionsligning mht. kapital. I stedet opskriver transitionsligningen med formue, så:

$$v_{t+1} = \frac{sw^\star}{1+n} + \frac{1+s\bar{r}}{1+n}v_t$$

Vi har intet aftagende marginalprodukt (og den tilhørende afbildning er således lineær) – i stedet er der konvergens, fordi udtynding pga. befolkning er større end den ekstra opsparing fra øget renteindtægt, $n > s\bar{r}$ (dette er vores stabilitetsbetingelse). Har vi teknologisk vækst er denne $1 + s\bar{r} < (1+n)(1+g)$, hvilket er plausibelt.

Da landet er lille, har dets opsparing ikke påvirkning på realrenten $r_t = \bar{r}$. Hvis realrenten er større i indlandet, vil der være arbitragemulighed ved at låne i udlandet, derfor vil K_t øges indtil $r_t = \bar{r}$. Det medfører samtidigt, at kapitalniveauet er bestemt er realrenten – dette bestemmer også lønnen.

Konvergens Da der er fri mobilitet for kapital, vil der ikke være nogen tilpasningsperiode. I stedet vil kapitalniveauet ændre sig øjeblikkeligt.

Åben vs. lukket økonomi I tilfældet, hvor renten i det lukkede land er forskellig fra verdensrenten, da vil der være en indkomstgevinst ved at åbne sig op. Årsagen er, at der sker en mere effektiv udnyttelse af kapitalen. Dog vil lønnen falde hvis renten i det lukkede land er lavere end verdensrente (marginalproduktet på kapital $r_c^\star$ vil stige til $\bar{r}$, hvilket vil medføre fald i marginalproduktet på arbejdskraft). Indkomstgevinsten kan dog omfordeles og derved sikre alle indkomststigning.

Risiko I visse tilfælde skal investorer have en risikopræmie for at investere. Således bliver $r_t = \bar{r} + \rho$, hvor ρ er en risikopræmie.

Hvis landet er nettodebitor betales renten $\bar{r} + \rho$ (vi ser bort fra nedslidning) på kapital. Hvis landet er nettokreditor forrentes kapital i indlandet med $\bar{r} + \rho$, men kapital i udlandet dog kun med $\bar{r}$

Estimation med empiri 95 pct. konfidensintervallet går fra to standardafvigelser under en given værdi til to standardafvigelser over værdien. Har vi ved OLS fundet en værdi 1,5 med en standardfejl på 0,15 må den sande værdi være med 95 pct. sikkerhed ligge indenfor intervallet [1,2; 1,8]. Ligger vores hypotese udenfor dette bånd kan vi sige, at den funde værdi er *signifikant* større (se også s. 138).

Den generelle Solowmodel (kap. 5)

Solowmodellen med eksogen vækst forsøger at løse problemet fra modellen i kap. 3, hvor der ikke var vækst i steady state. Der er to potentielle kilder til økonomisk vækst: Kapitalakkumulation og teknologisk fremskridt.

Linearisering

For at danne os et billede af konvergensraten kan vi opskrive en relation for modellens konvergens. Vi opskriver transitionsligningen på generisk form $\tilde{k}_{t+1} = G(\tilde{k}_t)$. Ved hjælp af 1. ordens Taylor-approksimation kan vi linearisere funktionen omkring steady state værdien. Vi lineariserer, da det muliggør en løsning af den *lineære* differensligning, der fremkommer. En Taylor-approksimation af første orden har formen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{12}$$

Vi kan indsætte udtrykket for transitionsligningen i stedet for $f(x)$ og steady state værdien som x_0:

$$\begin{aligned} G(\tilde{k}_t) - G(\tilde{k}^\star) &= G'(\tilde{k}^\star)(\tilde{k}_{t+1} - k^\star) \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^\star &= G'(\tilde{k}^\star)(\tilde{k}_{t+1} - k^\star), \end{aligned} \tag{13}$$

hvor vi har brugt, at i steady state $G(\tilde{k}^\star) = \tilde{k}^\star$

Hvis vi i stedet for f indsætter $\ln(\tilde{k}_{t+1})$ i Taylor-approksimationen, da får vi, at

$$\ln(\tilde{k}_{t+1}) - \ln(\tilde{k}^\star) = \frac{1}{\tilde{k}^\star}(\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^\star) \Leftrightarrow \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^\star = \tilde{k}^\star(\ln(\tilde{k}_{t+1}) - \ln(\tilde{k}^\star)),$$

hvilket indsættes i (13) , hvorved vi får (da $\tilde{k}^\star$ går ud på begge sider):

$$\ln(\tilde{k}_{t+1}) - \ln(\tilde{k}^\star) = G'(\tilde{k}^\star)(\ln(\tilde{k}_t) - \ln(\tilde{k}^\star))$$

Vi benytter, at $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$. Indsætter vi og tager ln får vi, at α går ud på begge sider, så:

$$\ln(\tilde{y}_{t+1}) - \ln(\tilde{y}^\star) = G'(\tilde{k}^\star)(\ln(\tilde{y}_t) - \ln(\tilde{y}^\star))$$

Vi tilføjer $\ln \tilde{y}^\star - \ln \tilde{y}_t$ på begge sider:

$$\begin{aligned} \ln(\tilde{y}_{t+1}) - \ln(\tilde{y}^\star) - \ln(\tilde{y}_t) + \ln(\tilde{y}^\star) &= G'(\tilde{k}^\star)(\ln(\tilde{y}_t) - \ln(\tilde{y}^\star)) - \ln(\tilde{y}_t) + \ln(\tilde{y}^\star) \\ \Leftrightarrow \ln(\tilde{y}_{t+1}) - \ln(\tilde{y}_t) &= (1 - G'(\tilde{k}^\star))(\ln(\tilde{y}^\star) - \ln(\tilde{y}_t)) \end{aligned}$$

Vi definerer $\lambda = 1 - G'(\tilde{k}^\star)$ og da $0 < G'(\tilde{k}^\star) < 1 \Rightarrow 0 < \lambda < 1$.

Vi har nu et udtryk med følgende **fortolkning**: Den relative afstand for output mellem periode t til næste periode $t+1$ er en bestemt andel λ af den samlede afstand fra t til steady state. λ er således et udtryk for konvergensraten. Hvis $\lambda = 0{,}02$ da mindskes den resterende distance til steady state med 2 pct. hver periode.

Vi finder ved at differentiere transitionsligningen, at

$$G'(\tilde{k}_t) = \frac{1}{(1+n)(1+g)}[s\alpha(\tilde{k}_t^{\alpha-1} + (1-\delta)]$$

Vi har fra ligning 21 s. 135, at $\tilde{k}_t^\star = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow (\tilde{k}_t^\star)^{\alpha-1} = \left(\frac{n+g+\delta+ng}{s}\right)$, så

$$G'(\tilde{k}_t^\star) = \frac{1}{(1+n)(1+g)}[\alpha(n+g+\delta+ng) + (1-\delta)]$$

$$\Rightarrow 1 - G'(\tilde{k}_t) = \lambda = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(1-\alpha)(n+g+\delta+ng) \approx (1-\alpha)(n+g+\delta)$$

Heraf ser vi, at jo større α er desto lavere er konvergenshastigheden, hvilket skyldes at det aftagende marginalprodukt til kapital er mindre. Når $\alpha \to 1$ vil $\lambda \to 0$, da skalaafkastet til kapital er konstant. Parametrene n, δ, g trækker modsatte vej, da nedslidning/udtynding stiger. Ved indsættelse af parameterværdier finder vi, at konvergenshastigheden er cirka 5 pct.

Solowmodellen med human kapital (kap. 6)

Human kapital Summen af uddannelse arbejdere har fået. Human kapital akkumulerer ligesom fysisk kapital og vil derfor medføre langsommere konvergens. (En model, hvor humankapitalen ikke opspares ville ikke udvise denne tendens) Andelen optjent af human kapital går til arbejderne og ændrer ikke på indkomstfordelingerne.

Human kapital er inseperabel fra arbejderne og har derfor ikke sin egen rente. Vi betragter derfor $h_t = \frac{H_t}{L_t}$ i stedet for blot H_t i produktionsfunktionen.

Befolkningstilvæksten påvirker i modellen output i højere grad, da der både er en udtyndingeffekt i forhold til fysisk kapital og i forhold til human kapital.

Markedsfejl En øgning i investeringsraten af s_H påvirker BNP positivt. Der fremhæves dog to årsager til at offentlige institutioner bør udbyde undervisning. Det skyldes *imperfekte lånemarkeder* og *imperfekte markeder for forsikring.*

Imperfekte lånemarkeder En uddannelse vil generere en højere løn efter endt uddannelse. På baggrund deraf burde banker låne ud til unge, der vil uddanne sig. De kan dog ikke skelne mellem de, som færdiggør og de som ikke gør og derved kan de være afvisende i forhold til at låne ud til nogen.

Imperfekte forsikringsmarkeder Uddannelse giver ikke garanteret øget indkomst og man kunne derfor ønske at forsikre sig. Dette medfører imidlertid en form for *moral hazard*, da de der har forsikring ikke vil have samme incitament for at anstrenge sig på uddannelsen.

Growth accounting Vi kan forsøge at undersøge, hvor stor en del af forskellene mellem lande skyldes forskelle i teknologi. Antager, vi at $\alpha = \phi = \frac{1}{3}$ (og $g + \delta + ng = 0{,}075$) da får vi at steady state værdien (ligning 29 s. 162) er givet som:

$$y_t^\star = A_t \cdot s_K \cdot s_H \cdot (n + g + \delta + ng)^{-2}$$

Ved at dividere udtrykket for rige lande med udtrykket for fattige lande får vi:

$$\frac{y^{\text{rich}}}{y^{\text{poor}}} = \frac{A^{\text{rich}}}{A^{\text{poor}}} \cdot \frac{s_K^{\text{rich}}}{s_K^{\text{poor}}} \cdot \frac{s_H^{\text{rich}}}{s_H^{\text{poor}}} \cdot \left(\frac{n^{\text{poor}} + 0{,}075}{n^{\text{rich}} + 0{,}075}\right)^2.$$

På baggrund heraf kan vi empirisk finde alle led pånær $\frac{A^{\text{rich}}}{A^{\text{poor}}}$ og dermed finde den del forskelle i teknologi forklarer.

Social infrastuktur En forklaring på, hvorfor nogle lande er mere produktive andre (se Growth Accounting ovenfor) kan skyldes forskelle i den sociale infrastruktur. En hypotese er at økonomien præsterer bedre (større A_t), investerer mere i kapital (højere s_K) og investerer mere i uddannelse (højere s_H), hvis der er retfærdige love og gode finansielle institutioner, mm.

Konvergenshastighed Vi kan tilsvarende kap. 5 finde et udtryk for den approksimative vækstrate ved hjælp af linearisering. Derved finder vi, at:

$$\lambda \approx (1 - \alpha - \phi)(n + g + \delta + ng) \approx 2{,}5 \text{ pct.}$$

Vækstrate Vækstraten fra en periode til en anden er givet som

$$A_{t+1} = (1 + g)A_t \Leftrightarrow \ln(1 + g) = \ln\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right).$$

Den approksimative vækstrate er således: $g_t^A = \ln(A_{t+1}) - \ln(A_t) = \ln(1 + g) \approx g$
Den eksakte vækstrate kan omskrives som:

$$g_t^e = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t}$$

Vækstfaktor Givet en vækstrate g, da er vækstfaktoren $1 + g$.

Transitionsligningen Er givet som:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1 + n)(1 + g)}(s\tilde{k}_t^\alpha + (1 - \delta)\tilde{k}_t)$$

Solowligningen Er givet som:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1 + n)(1 + g)}(s\tilde{k}_t^\alpha - (n + g + \delta + ng)\tilde{k}_t)$$

Modificerede solowligning Er givet som:

$$\frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1 + n)(1 + g)}(s\tilde{k}_t^{\alpha - 1} - (n + g + \delta + ng))$$

Solowmodellen med begrænsede ressourcer (kap. 7)

Der er i modellen tilføjet land (og senere olie) som inputfaktor. Eftersom der er konstant skalaafkast til alle inputfaktorer er der aftagende skalaafkast til en kombination af K_t og L_t (under forudsætning af at eksponenterne til de andre ressourcer er større end 0). Land (eller begrænsede ressourcer) medfører således et *drag* på væksten, når der ikke er teknologisk vækst og selv med teknologiske fremskridt vil disse være mindre effektive end uden en begrænset ressource.

Når vi skal finde steady state anvender vi $z_t = \frac{k_t}{y_t}$. Vi ser, at hvis $z_t \to z^\star$ da må k_t og y_t vokse med samme rate.

Ekstraktionsrate Der antages en fast ekstraktionsrate, s_E.

Substitution Man mener, at jo mere begrænset en ressource bliver, desto højere bliver prisen. Det vil øge incitamentet til at finde alternative substitutter. I stedet for at bruge en meget lille del af den begrænsede med meget høj teknologisk snilde, vil man finde et produkt der fuldstændig kan erstatte det forhenværende. Dette kan dog ikke beskrives med en model, der kun rummer 1-2 naturressourcer.

Produktive eksternaliteter og endogen vækst (kap. 8)

Kapitlet omhandler (semi-)endogen vækst. Solowmodeller kaldes også eksogene vækstmodeller, da de antager eksogen vækst. Endogene vækstmodeller *endogeniserer* væksten og søger at forklare denne. I bogen behandles en model med produktive eksternaliter (kapitel 8) og en med forskning og udvikling (kapitel 9).

Produktive eksternaliteter I de tidligere modeller finder vi at (den approksimative) vækst er givet ved $g_t^y = \alpha g_t^k$, men da $\alpha < 1$ kan væksten ikke opretholdes af opsparing. Var der stigende skalaafkast til kapital og arbejdskraft ville eksogen vækst ikke være nødvendig. Det ville imidlertid medføre, at virksomheder (under perfekt konkurrence) ville øge produktionen uendeligt og er derfor uønsket.

Løsningen er konstant skalafkast på virksomhedsniveau og stigende skalaafkast på aggregeret niveau. $A_t = K_t^\phi$ er således givet på virksomhedsniveau.

Værdi af ϕ Værdien af ϕ er udtryk for hvor god den nuværende kapital er til at skabe ny kapital og afhænger af hvordan man ser på udviklingen af teknologi (se 'learning by doing' under kapitel 9). Sættes $\phi = 1$ vil der være konstant marginalprodukt til kapital[1] alene – dette kaldes endogen vækst. Er $\phi < 1$ vil der være aftagende marginalprodukt til kapital.

Transitionsligningen Findes ved at løse $\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t}$ og giver

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[s\tilde{k}_t^{\frac{\alpha+\phi-\alpha\phi}{1-\phi}} + (1-\delta)\tilde{k}_t^{\frac{1}{1-\phi}}\right]^{1-\phi}. \tag{14}$$

[1]Vi betragter den generelle Cobb-Douglas funktion af formen $Y = A\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$, hvor $a_i > 0$. Homogeniteten er givet som $h = \sum_{i=1}^n a_i$. Der gælder, at er eksponenten a_k for én inputfaktor større end 1, da vil summen af eksponenterne (og dermed homogeniteten) $h = a_k + \sum_{i\neq k}^n a_i > 1$. Altså udviser en produktionsfunktion, hvor der er konstant eller stigende marginalprodukt til mindst én produktionsfaktor stigende skalaafkast.

Semi-endogen vækst Vi kan finde væksten i teknologiniveauet til:

$$\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = (1+n)^{\frac{\phi}{1-\phi}} - 1 \equiv g_{se}. \tag{15}$$

I steady state vil vækstraten i kapital pr. arbejder og output pr. arbejder være lig væksten i teknologiniveauet.

Det ses, at er befolkningsvæksten $n = 0$ vil der ikke være vækst. Dette er indbegrebet af semi-endogen vækst. For at kunne gøre brug af det stigende skalaafkast i produktionen er der nødt til at være en (eksogen – derfor 'semi') vækst i befolkningen (eksponenterne vil ikke summe til mere end 1). Dette undgår vi når $\phi = 1$, da der vil være konstant skalaafkast til kapital – det kaldes for endogen vækst.

Vi ser, at øget befolkningsvækst giver øget vækst. Dette stemmer umiddelbart ikke overnes med empiri. Man kan dog forfølge en idé, om at empirisk data dækker over transitorisk vækst (da konvergens til steady state er meget lang pga. eksternalitet), der afhænger negativt af befolkningstilvækst.

Endogen vækst (AK Model) Hvis $\phi = 1$ er der ingen aftagende marginalprodukt på kapital og økonomien vil ikke konvergere.

En vigtig pointe er her, at noget der giver *niveau*-skifte i Solowmodellen ofte giver et skifte i *vækstraten.*

Skalaeffekt Væksten afhænger af populationens størrelse. Er der vækst i befolkningen vil økonomien opleve eksplosiv vækst, hvilket ses af: $A_t = L_t k_t^{\phi}$ Dette er ikke i overensstemmelse med empiri.

Dette kan løses ved at definere variablene pr. arbejder $A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}$, men det vil medføre at arbejdskraft er uproduktiv, da den positive effekt af en stigning i arbejdskraften på virksomhedsniveau vil blive modvirket af en negativ effekt på samlet kapital/arbejdskraft-forhold på aggregeret niveau.

R&D-baseret endogen vækst (kap. 9)

Om forskning og udvikling Forskning og udvikling (R&D) beskriver en bevidst process for at opnå bedre teknologi. De nye idéer er *offentlige goder*, dvs. ikke-rivaliserende (marginalomkostningen er 0 eller tæt på) og ikke-ekskluderbare. Dette medfører manglende incitament til at lave forskning, da $MC < AC$ for alle q, da den faste omkostning til R&D ikke er indtægtsdækket. Under monopol, hvor $MR = MC$, er der mulighed for privat R&D, men der vil ske produktion under det sociale optimum. Monopol kan sikres gennem patenter.
Der vil ved perfekt konkurrence ikke ske privat R&D og hvis idéen er ikke-ekskluderbar vil der *uanset markedsform* ikke ske privat R&D.

Modellen Modellen beskriver verden som én stor økonomi (og man bør således ikke bruge krydslandeempiri), dvs. der er ingen import.

Der er konstant skalaafkast til rivaliserende goder K og L. Derfor summer eksponenterne til mere end 1.

Standing on shoulders Beskriver det forhold, at idéer avler nye ideer. Dette taler for en værdi $\phi > 0$ eller tæt på $\phi \approx 1$. ϕ er udtryk for elasticiteten af eksisterende viden.

Fishing out Beskriver det forhold, at det bliver sværere og sværere at finde nye idéer. Argumenterer for $\phi < 0$. Almindeligvis antager vi et positivt ϕ.

Stepping on toes Beskriver det forhold, at to forskningsarbejder laver det samme arbejde, hvilket skulle medføre $\lambda < 1$, da der vil være et negativt spillover fra den enkelte virksomheds R&D til det aggregerede niveau.

Semi-endogen vækst Semi-endogen vækst fremkommer, når $0 < \phi < 1$. Vækstraten g_t i det teknologiske niveau A_t vil konvergere monotont med en steadystate vækstrate $g_t \to g_{se}$ for $t \to \infty$.

Endogen vækst Fremkommer når elasticiteten af eksisterende viden er lig en $\phi = 1$. Vi sætter $n = 0$, da der ellers vil forekomme eksplosiv vækst. Knivsægtilfældet $\phi = 1$ er urealistisk, men illustrativt for en stor værdi af ϕ.

Skalaeffekt Større arbejdskraftinput (L_0) medfører større vækst i BNP pr. arbejder.

Hemi-endogen vækst Begrebet bruges til at beskrive udviklingen i den vestlige hemisfære. En ændring i R&D-andelen medfører langvarende vækst. En gradvis øgelse af andelen vil således medføre langsigtet vækst, hvilket stemmer overens med empiri.

Forskellen til vækst i investeringsraten i den basale Solow model er at en lille ændring i s_R har væsentlig større betydning en i s.

Stylized facts

Stylized Fact 1

Some countries are rich and some are poor, the differences are enormous, and it has pretty much been like that in relative terms for a long time. However, there is some tendency towards a more equal world income distribution over the past four decades, but not much at the very bottom.

Stylized Fact 2

Growth rates vary substantially between countries and by the process of growing or declining quickly, a country can move from being relatively poor to being relatively rich, or from being relatively rich to being relatively poor.

Stylized Fact 3

Growth can break in a country, turning from a high rate to a low one or vice versa.

Stylized Fact 4

Convergence: If one controls appropriately for structural differences between the countries of the world, a lower initial value of GDP per worker tends to be associated with a higher subsequent growth rate in GDP per worker. This accords with the idea that in the long run income and GDP per worker converge to a country-specific growth path which is given by the country's basic structural characteristics, and possibly also by its initial position.

Stylized Fact 5

Over the last 140 years and probably for periods up to 200 years and more, many countries in Western Europe and North America have had relatively constant annual rates of growth in GDP per capita in the neighbourhood of 2 per cent.

Stylized Fact 6

During the long periods of relatively constant growth rates in GDP per worker in the typical western economy, there has been a long-run tendency that labour's share of GDP has stayed relative constant and (hence) that the average real wage of a worker has grown by approximately the same rate as GDP per worker.

Stylized Fact 7

During the long periods of relatively constant growth in GDP per worker in the typical Western economy, there has been a long-run tendency that capital's (wealth's) income share has been relatively constant and a long-run tendency that the capital-output ratio has been relatively constant. Consequently, there has been a long-run tendency that the rate of return on capital (wealth) has been relatively constant, and that the capital-labour (wealth-labour) ratio has grown by approximately the same rate as income per worker.

Appendix

Følgende oversigt er ikke færdiggjort og bør således læses med forbehold for fejl og mangler. Eventuel fundne fejl eller forslag til tilføjelser modtages gerne på martin@norgaardpetersen.dk.

Effekter af parameterskift

En stigning i s giver i Solowmodellen ikke øget vækst, i modellen med endogen vækst en stigning i vækstraten og i modellen med semi-endogen vækst transitionsvækst.

Kapitel 3

- En stigning i L_t påvirker ikke BNP. pr. arbejder i steady state. Fordobling af L_t vil medføre fordobling af K_t i steady state, som vil medføre fordobling af Y_t. Det skyldes CRS (konstant skalaafkast) til K_t og L_t
- Stigning i n medfører et fald i BNP pr. arbejder, som følge af udtynding, der reducerer kapital pr. arbejder og dermed produktiviteten. På kort sigt vil der være en negativ transitorisk effekt på *vækstraten* som følge af en stigning i n
- En stigning i s vil på kort sigt medføre transitorisk vækst, men på lang sigt vil der kun være en *niveaueffekt* på BNP pr. arbejder. Årsagen er, at der vil være aftagende marginalprodukt på kapital, men lineært stigende udtynding og nedslidning (se transitionsligning)
- En stigning i totalfaktorproduktiviteten B vil medføre en stigning i y_t. Stigningen i y_t vil være større end i B, da øget indkomst vil medføre øget kapitalakkumulation som igen resulterer i et større y.

Kapitel 4

- En stigning i s medfører højere formue $v^\star$ som medfører øget nationalindkomst (BNI), men der er ingen påvirkning på produktiviteten, dvs. BNP pr. arbejder y_t
- En stigning i $\bar{r}$ medfører fald i BNP. pr. arbejder.
- En stigning i n medfører intet fald i BNP. pr. arbejder.
- En stigning i B (ny teknologi) medfører øget kapital $k^\star$ som medfører øget BNP pr. arbejder.

Kapital (og dermed BNP pr. arbejder og realløn) tilpasser sig øjeblikkeligt og der foregår således ingen transitionsproces.

Kapitel 5

- En stigning i L_t påvirker ikke BNP. pr. arbejder i steady state. Fordobling af L_t vil medføre fordobling af $K_t = k_t L_t$ i steady state, som vil medføre fordobling af Y_t. Det skyldes CRS til K_t og L_t
- Stigning i n medfører et fald i BNP pr. arbejder, som følge af udtynding, der reducerer kapital pr. arbejder og dermed produktiviteten. På kort sigt vil der være en negativ transitorisk effekt på *vækstraten* som følge af en stigning i n
- En stigning i s medfører en niveau stigning i BNP pr. arbejder
- En stigning i den eksogene vækstrate medfører en stigning i niveauet for BNP pr. arbejder.

Kapitel 6

- Stigning i n medfører et fald i BNP pr. arbejder, som følge af udtynding, der reducerer kapital pr. arbejder og dermed produktiviteten. På kort sigt vil der være en negativ transitorisk effekt på *vækstraten* som følge af en stigning i n

Kapitel 7

- En stigning i L_t eller K_t vil medføre fald i BNP pr. arbejder som følge af DRS (aftagende skalaafkast) til L_y og K_t. Intuitionen ift. L_t er, at en stigende befolkning vil medføre faldende marginalprodukt til land som vil mindre produktionen pr. arbejder.
- Stigning i n medføre fald i vækstraten i BNP pr. arbejder i steady state, da der vil komme et øget pres på naturressourcer. Dette er særegent for denne model.
- Stigning i ekstraktionsraten s_E medfører øget produktivitet på kort sigt, men på lang sigt falder den.
- En stigning i $x_t = \frac{X_t}{L_t}$ vil medføre en positiv niveaueffekt på indkomst pr. arbejder, men ikke påvirke vækstraten på lang sigt.

Kapitel 8

- I modellen for semi-endogen vækst vil en stigning i n kun have en transitorisk vaksteffekt, men den vil vare længere end i fx. Solowmodellen kap. 6. Hvis $n = 0$ vil der ikke være vækst (semi-endogen)
- I AK-modellen ($\phi = 1$) vil der være CRS til kapital alene. En stigning i L_t vil give en øget vaksteffekt, mens en stigning i n vil give accelerende vækst.
- En stigning i s giver anledning til en højere vækstrate i BNP pr. arbejder.

Kapitel 9

- En stigning i n giver øget vækst. Dette virker ikke empirisk plausibelt. Man kan undsige sig dette ved at argumentere for at der er tale om transitorisk vækst. Et fald i n vil her give et højere niveau, men en lavere vækst.

Parameterværdier

	α	s	n (i-land)	n (u-land)	δ	g	$n+g+\delta$		β	s_E	κ	ϵ	s_R	ρ	λ
Almindeligvis	$\frac{1}{3}$	0,2-0,3	0,005-0,01	0,03	0,05	0,02	0,075								
Kap. 5	$\frac{1}{3}$						0,06-0,075								
Kap. 6	$\frac{1}{3}$							$\frac{1}{3}$							
Kap. 7 (olie)									0,6 (lavt)	0,005	0,4 (højt)				
Kap. 7 (land)	0,2								0,6		0,2				
Kap. 7. (land og olie)											0,1	0,1			
Kap. 9 (endogen vækst)			0					1							
Kap. 9 (hemi-endogen)	$\frac{1}{2}$	0,2			0,06			$\frac{1}{2}$					0,02	1	1

Parameteren α er udtryk for hvor produktiv kapital er til at generere indkomst – outputelasticiteten mht. kapital.