# Hovedpointer fra undervisningen i Mikro I

Martin Nørgaard Petersen

15. december 2017

*Følgende gennemgår udvalgte begreber fra Microeconomics (2. udgave) af T.J. Nechyba og undervisningen i Mikroøkonomi I afholdt af Hans Keiding i efteråret 2017. Der tages forbehold for fejl og mangler. Eventuelle rettelser kan sendes til martin@norgaardpetersen.dk*

## 1 Forbrugerens problem

**Budgetrestriktion** Givet som

$$I = \sum_{i=1}^{l} p_i x_i$$

For to goder findes ved isolation af $x_2$, at skæringen med 2.-aksen er givet som $I/p_2$ og hældingen er $-p_1/p_2$. Som følge af eksempelvis rationering, mængdebegrænsede tilbud, forbrugsafhængige subsidier el. skatter kan man opleve knækkede budgetkurver.

**Indkomst fra initialbeholdning** (el. endowment). Her er indkomsten givet som $I = \sum_{i=1}^{l} p_i e_i$ Altså afhænger indkomsten af priserne og vi skriver budgetligningen som: $\sum_{i=1}^{l} p_i e_i = \sum_{i=1}^{l} p_i x_i$. Deraf ser vi, at initialbeholdningen altid vil ligge på budgetlinjen.

**Intertemporale budgetter** Vi har givet to perioder, 1 og 2, samt forbrug og inititalbeholdninger i hver af perioderne hhv. $c_1$ og $c_2$ samt $e_1$ og $e_2$. Renten på lån/opsparing er $r$. Da er forbruget i næste periode 2, givet som: $c_2 \leq (1 + r)(e_1 - c_1) + e_2$. Dette kan generaliseres til flere perioder.

**Marginale substitutionsforhold, MRS** Det forhold, som forbrugeren (eller virksomheden, se TRS) er villig til at substituere et gode for et andet. Beskriver også hældningen af indifferenskurver. Er for to goder matematisk givet som:

$$MRS = \frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}}$$

Bemærk, at MRS er uafhængig af den valgte nyttefunktion. Det er således muligt lave en monoton transformation af nyttefunktionen, uden det påvirker MRS.

I forbindelse med at man ønsker at finde en løsning på et givent problem, bør man undersøge følgende:

**Er der en løsning?** Der er en løsning, når præferencerne kan beskrives ved en *kontinuert* nyttefunktion. Hvis budgetmængden er kompakt (afsluttet og begrænset), da vil enhver kontinuert funktion antage sit maksimum et sted i budgetmængden.

**Er den entydig?** Er funktionen differentiabel kan man opstille Lagrange-funktionen og løse første ordens betingelserne. Forudsat at forbrugeren har strengt konvekse præferencer er løsningen entydig. Hvis begge goder er essentielle vil der være tale om en indre løsning. Er et af goderne ikke essentielt, kan der være tale om en randløsning.

Endeligt bør man så undersøge, hvilke egenskaber løsningen har.

## 1.1 Nyttefunktioner og præferencer

Nyttefunktioner antages at opfylde følgende:

**Komplethed** Forbrugeren kan sammenligne alle varebundter.

**Transitivitet** Hvis et varebundt A er bedre end et varebundt B, og et bundt B er bedre end bundtet C, så er bundtet A bedre end bundtet C.

Ofte siges forbrugeren at være *rationel*, hvis præferencerne er komplette og transitive. Denne formulering er dog ikke skattet af H. Keiding.

**Monotonicitet** Der gælder, at mere er bedre, eller mindst lige så godt.

**Streng konveksitet** Hvis det gælder for to allokeringer, at $x_1 \sim x_2$ da må kombinationer af varebundter $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ for $\lambda \in [0,1]$ være mindst lige så gode.

**Kontinuitet** Begrebet kan defineres ved indførsel af den øvre niveaumængde givet som $\{x' \in \mathbb{R}^n_+ | x' \succeq x\}$, altså mængden af bundter $x'$, der er mindst ligeså gode som $x$, og den nedre niveaumængde $\{x' \in \mathbb{R}^n_+ | x' \preceq x\}$. Da er præferencerne kontinuerte, når den øvre og de nedre niveaumængde er afsluttede for alle $x$.

Populært sagt betyder det, at små ændringer i forbrug, giver små ændringer i nytten. Antages typisk af tekniske årsager. Ofte antages yderligere, at funktionerne er differentiable for at kunne betragte hældningen af indifferenskurverne.

### Typer af nyttefunktioner

**Quasilineære** Følger formen: $u(x_1,x_2) = v(x_1) + x_2$, hvor $v$ er voksende og konkav. $MRS = -v'(x)$. Beskriver kombinationer af et essentielt gode og et ikke-essentielt gode.

**CES-funktioner** Er givet på formen

$$u(x_1,x_2) = (\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho})^{\frac{1}{\rho}},$$

hvor $\alpha \in [0,1]$ og $\rho \geq 0$, $\rho \neq 0$. Vi ser, at $\rho = -1$ svarer til perfekte substitutter. Cobb-Douglas funktioner svarer til tilfældet, hvor $\rho \to 0$ og og perfekte komplementer svarer til at $\rho \to \infty$.

MRS er for CES-funktioner givet som

$$MRS = -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1},$$

hvor MRS for de følgende tilfælde nemt ses ved indsættelse af $\rho$.

**Lineære (perfekte substitutter)** Generelt tilfælde for $a,b > 0$: $u(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2$, $MRS = -a$. I et bestemt forhold $a$ er forbrugeren indifferent mellem de to goder.

**Leontif (perfekte komplementer)** Generelt tilfælde for $a,b > 0$: $u(x_1,x_2) = \min\{ax_1,bx_2\}$. Her gælder, at for $x_2 > x_1$ er $MRS = -\infty$ og for $x_1 > x_2$ er $MRS = 0$. Indifferenskurvernes 'knæk' vil ligge på en ret linje med hældning $a/b$.

**Cobb-Douglas** For Cobb-Douglas funktionen afhænger MRS kun af forholdet mellem vare 1 og vare 2. Altså er MRS konstant i rette linjer fra origo, hvilket indebærer, at præferencerne er homotetiske (se afsnit 6.1). MRS er givet som:

$$MRS = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1}$$

Vi bemærker desuden, at specielt for Cobb-Douglas er faste indkomstandele. Det betyder, at for en funktion af typen $u(x_1,x_2) = x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$ anvendes $\frac{1}{3}$ af indkomsten på vare $x_1$ og tilsvarende $\frac{2}{3}$ på vare $x_2$.

**Substitutionselasticiteter** Beskriver graden af udskiftelighed mellem de to goder. Altså et mål for hvor meget forholdet mellem de to varer $x_2/x_1$ skal ændre sig for at MRS ændrer sig med 1 pct (eller omvendt). Grafisk betyder dette, at jo mere krum indifferenskurverne er desto lavere er substitutionselasticiteten.

Substitutionselasticiteten er givet som:

$$\sigma = \left|\frac{dr/r}{dMRS/MRS}\right| = \left|\frac{d\ln(x_1/x_2)}{d\ln MRS}\right|,$$

hvor $r = x_2/x_1$.

For CES-funktioner er substitutionselasticiteten

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}$$

**Essentielt gode** Et gode er ikke essentielt, hvis forbrugeren kan få positiv nytte af varebundter, der ikke indeholder godet.

## 1.2 Efterspørgsel

**Marshall efterspørgselsfunktion** (eller ukompenseret efterspørgsel) Noteres her $\xi(\mathbf{p},i)$, hvor $\mathbf{p}$ er en prisvektor og angiver hvad en forbruger er villig til at købe givet bestemte priser og en bestemt indkomst. Findes ved at maksimere forbrugerens nyttefunktion givet en budgetrestriktion, altså kan forbrugeres nyttemaksimeringsproblem skrives som

$$\max_{x_1,\dots x_n} u(x_1,\dots x_n) \text{ u.b. } p_1x_1 + \dots + p_nx_n = I,$$

med den tilhørende Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(x_1,...,x_n) = u(x_1,...x_n) - \lambda((p_1x_1 + ... + p_nx_n) - I),$$

hvor vi har benyttet, at forbrugeren har monotone præferencer og løsningen derfor ligger på randen af budgetmængden. Forbrugeren nyttemaksimerer ved at sætte det marginale substitutionsforhold, MRS, (subjektive bytteforhold) lig de relative priser (objektive bytteforhold).

Givet en Cobb-Douglas nyttefunktion og tilsvarende en budgetrestriktion med to varer $x_1$, og $x_2$ finder vi, at:

$$\xi_1 = x_1 = \alpha\frac{I}{p_1} \quad \text{og} \quad \xi_2 = x_2 = (1-\alpha)\frac{I}{p_2}$$

**Hicks efterspørgselsfunktion** (el. kompenseret efterspørgsel, MWTP) Findes ved at udgiftsminimere for en given nytte. Altså:

$$\min_{x_1,...x_n} p_1x_1 + ... + p_nx_n \text{ u.b. } u(x_1,...,x_n) = \bar{u},$$

med den tilhørende Lagrange-funktion:

$$\mathcal{L}(x_1,...x_n) = p_1x_1 + ... + p_nx_n - \lambda(u(x_1,...x_n) - \bar{u})$$

Således fremkommer den kompenserede efterspørgsel $h(\mathbf{p},\bar{u})$. Den kompenserede efterspørgsel er lig den ukompenserede for quasiliniære goder, da forbruget af quasiliniære goder er kendetegnet ved manglende indkomsteffekt.

Den kompenserede efterspørgsel kaldes også 'Marginal Willingness to Pay'-kurven, da den er udtryk for det marginale substitutionsforhold (det vil sige forbrugerens betallingsvillighed af et gode opgjort i et andet gode) ved forskellige priser. Denne kan udledes på samme måde som den kompenserede efterspørgsel og indeholder udelukkende substitutionseffekten og ikke indkomsteffekten af en prisændring på det iagttagede gode. Dette medfører også, at den altid vil have negativ hældning, hvor den ukompenserede efterspørgselskurve i visse tilfælde kan være opadgående.

Den kompenserede efterspørgsel vil være stejlere end den ukompenserede efterspørgsel for normale goder og omvendt for inferiøre goder.

**Efterspørgselselasticitet** Er et udtryk for, hvor meget efterspørgslen ændres, når prisen på en vare ændrer sig marginalt. Denne er givet som:

$$\epsilon_h = -\frac{\frac{d\xi_h}{\xi_h}}{\frac{dp_h}{p_h}}$$

Efterspørgselselasticiteten er interessant, da den giver et udtryk for ændringen i den samlede omsætning som følge af en prisændring, idet det gælder, at:

$$\frac{d(p_h\xi_h)}{dp_h} = \xi_h + d\xi_h \cdot \frac{p_h}{dp_h},$$

hvilket er konsistent med stof fra ØP A. Her er første led udtryk for priseffekten på den samlede omsætning og andet led udgør mængdeeffekten (negativ ved prisstigning). Dette kan yderligere omskrives:

$$\frac{d(p_h \xi_h)}{dp_h} = \xi_h \left(1 + \frac{d\xi_h}{\xi_h} \cdot \frac{p_h}{dp_h}\right) = \xi_h(1 - \epsilon_h),$$

så omsætningen falder hvis $\epsilon > 1$ (elastisk efterspørgsel), stiger hvis $\epsilon < 1$ (uelastisk efterspørgsel) og er uændret for $\epsilon = 1$ (unielastisk efterspørgsel).

**Indkomstefterspørgsel (Engel-kurver)** Efterspørgslen efter vare 1, som funktion af indkomst. For normale goder er hældningen positiv.

**Krydsprisefterspørgsel** Efterspørgsel efter vare 1 som funktion af prisen på vare 2. Når substitutionselasticiteten er 1 (Cobb-Douglas) er det en lodret linje, da substitutionseffekten og indkomsteffekten er lige store. Er substitutionselasticiteten større end 1 vil hældningen være negativ.

## 1.3 Substitutions- og indkomsteffekter

**Typer af goder** Der findes forskellige typer af goder. Her bør nævnes:

**Inferiørt gode** Når indkomsten stiger, vil forbrugeren forbruge mindre af dette gode. Bemærk, at det er forbrugerens præferencer, der afgør om godet er inferiørt og ikke godet i sig selv (godet kan være normalt for nogen og inferiørt for andre). Er et gode inferiørt skal mindst et andet gode være normalt.

**Normalt gode** Et gode hvor – ceteris paribus – en stigning i indkomst medfører en stigning i efterspørgsel. Altså et gode, hvis forbrug er karakteriseret ved positive indkomsteffekter. Samme bemærkning som ovenfor gælder her.

**Quasilineære gode** Et gode, der ikke påvirkes af indkomsteffekter.

**Giffen gode** Et gode, hvor indkomsteffekten er (negativt) større end substitutionseffekten (se også Slutsky-ligningen for matematisk udtryk). Der vil således forbruges mere af godet, når prisen på godet stiger.

**Luksusgode (nødvendigt gode)** Et gode er et luksusgode (nødvendigt gode), hvis andelen af indkomst der bruges på det er stigende (aftagende) i indkomsten. Disse goder afhænger således af forbrugs*andelen* af indkomst. Luksusgoder er en underopdeling af normale goder, men visse normale goder kan godt være nødvendige goder.

**Substitutionseffekt** Findes grafisk ved at parallelforskyde budgetlininen, så forbrugeren fastholdes på samme indifferenskurve. Kommer som følge af en ændring i bytteforholdet mellem de to varer.

Bemærk, at jo større substitutionselasticitet, desto større substitutionseffekt.

**Indkomsteffekt** Ændringen i forbruget som følge af, at forbrugerens indkomst ændrer sig. Svarer til skiftet fra en indifferenskurve til den anden.

**Hicks-kompensation** Ved at udgiftsminimere (vi anvender her at nyttemaksimering er lig udgiftsminimering) givet den samme nytte forbrugeren opnåede før en prisændring, kan vi finde substitutionseffekten, eftersom forbrugeren opretholder samme velstand. Resten af den totale effekt må derefter skyldes indkomsteffekter. Altså er den totale effekt lig summen af substitutionseffekten og indkomsteffekten.

Fremgangsmåden er således ved en prisændring i en vare (i en to-vareøkonomi) med fastholdt indkomst:

1. Find efterspørgslen $\xi_{før}(p_1^{før},p_2,I)$ ved de tidligere priser.
2. Find efterspørgslen $\xi_{efter}(p_1^{efter},p_2,I)$ ved de nye priser.
3. Find den kompenserede efterspørgsel $h(p_1^{efter},p_2,u^{før})$.
4. Da er substitutionseffekten givet som $h-\xi_{før}$ og indkomsteffekten er givet som $\xi_{efter}-h$.

Der findes også Slutsky-kompensation, hvor forbrugeren kompenseres, så denne kan opnå det oprindelige varebundt. For mere herom henvises til anden litteratur.

**'Wealth'-effect** Opstår når forbrugeren har en inititalbeholdning af et gode, så indkomsten også er prisafhængig. Markerer man alle løsninger til forbrugerens problem for alle prisforhold fremkommer *offerkurven*.

**Bagudbøjet udbudskurve for arbejdskraft** Når indkomsten afhænger af prisen, fordi forbrugeren har en initialbeholdning (af eksempelvis tid/arbejdskraft), kan der fremkomme en bagudbøjet udbudskurve. Når prisen på arbejdskraft stiger, vil indkomsten således stige fremfor at falde.

**1. grads prisdiskrimination** Producenten kender alle forbrugeres reservationspriser og sælger et givent gode til netop denne pris. Derved er forbrugeroverskuddet 0.

**Dødvægtstab** Tab i samlet velstand som følge af en markedsforvridning. Forbrugeren kunne ved at have fået indkomsten reduceret svarende til skatteprovenuet opnået et højere nytteniveau. Dette svarer til, at alle varer pålægges samme afgift. Dermed ser man, at dødvægtstabet alene forekommer som følge af substitutionseffekter, hvor forbrugeren substituerer beskattede goder med ubeskattede goder.

Dødvægtstabet skal måles på MWTP-kurven og ikke på den ukompenserede efterspørgselskurve, da tabet opstår som følge af substitutionseffekter. Ved normale goder vil man med den ukompenserede efterspørgsel overestimere dødvægtstabet.

Skattebetaling udregnes som: $T = t \cdot \xi_i(p_1 + t,p_2,I)$. Dødvægtstabet findes ved at udregne den lump-sump skat, der ville stille forbrugeren lige så godt: $L = I - e(p_1,p_2,u^e)$, hvor $u^e$ er nytten efter forbrugsskatten. Forskellen $L - T$ er dødvægtstabet.

**Indirekte nyttefunktion** Givet ved $v(\mathbf{p},I) = u(\xi(\mathbf{p},I))$ og er den nytte forbrugeren opnår ved at optimere sit forbrug af en række varer.

**Udgiftsfunktion** Givet ved $e(\mathbf{p},u^0) = \mathbf{p} \bullet h(\mathbf{p},u)$ og opfylder, at det er den mindste udgift, der skal til for at opnå nytteniveauet $u^0$. Det bundt, der realiserer denne udgift er den kompenserede efterspørgsel.

For faste priser er den indirekte nyttefunktion og udgiftsfunktionen hinandens inverse, så $e(\mathbf{p},v(\mathbf{p},I)) = I$ og $v(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u)) = u)$. Dette er skriftligt bevist nedenfor.

**Nyttemaksimering er lig udgiftsminimering** Vi viser først, at nyttemaksimering medfører udgiftsminimering: Antag $x$ maksimerer nytte ved givne priser og indkomst. Antag, at der findes et bundt $x'$ der er ligeså godt, men billigere. Da ville forbrugeren kunne supplere forbruget i $x'$ med en lille smule af hver vare og med monotone præferencer være bedre stillet end i $x$, hvilket er en modstrid.

Vi viser den anden vej: Antag, at bundtet $x$ minimerer udgiften blandt alle bundter med mindst nytte $\bar{u} = u(x)$, men at der er et andet bundt $x'$, der koster det samme og er bedre. Fjerner vi en lille smule af hver vare fra $x'$, får vi et nyt bundt $x''$ der er bedre og billigere end $x'$ og dermed også billigere end $x$ og så har vi en modstrid. Altså har vi vist, at nyttemaksimering $\Leftrightarrow$ udgiftsminimering.

**Dualitet** Følgende sammenhæng er givet mellem den kompenserede og den ukompenserede efterspørgsel:

1. $\xi_i(\mathbf{p},I) = h_i(\mathbf{p},v(\mathbf{p},I))$
2. $h_i(\mathbf{p},u) = \xi_i(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u))$

**Envelope theorem** Vi forestiller os, at vi skal enten minimere eller maksimere en funktion $f(\mathbf{x},\alpha)$ under betingelse af $g(\mathbf{x},\alpha) = 0$, hvor $\alpha$ (dvs. parametre) og $x$ er vektorer. Da kan vi opstille Lagrange-funktionen og finde løsningen $\mathbf{x}^*$. Vi indfører $F(\alpha) = f(\mathbf{x}^*)$ for funktionen $f$ evalueret i løsningen $\mathbf{x}^*$. For et minimeringsproblem vil dette være udgiftsfunktionen $e(\mathbf{p},u)$ og for et maksimeringsproblem vil det være den indirekte nyttefunktion $v(\mathbf{p},I)$.

Da siger Envelope theorem, at:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}\right|_{\mathbf{x}^*} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)\right|_{\mathbf{x}^*}$$

hvor den lodrette linje læses, som 'de afledte evalueret ved optimum for de variable'.

**Sheppards lemma** Forsøger vi at minimere funktionen for to varer $f(\mathbf{x},\mathbf{p}) : p_1x_1 + p_2x_2 = I$ under betingelse af $g(\mathbf{x},\mathbf{p}) : \bar{u} = u(x_1,x_2)$, da finder vi, at løsningen er givet ved $F(p_1,p_1,u) = e(p_1,p_2,u)$. Da siger Envelope Theorem, at

$$\frac{\partial e(p_1,p_2,u)}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}\right|_{x_1^*,x_2^*} = \left.\left(\frac{\partial(p_1x_1 + p_2x_2)}{\partial p_i}\right)\right|_{x_1^*,x_2^*} - \lambda \left.\left(\frac{\partial(u(x_1,x_2) - \bar{u})}{\partial p_i}\right)\right|_{x_1^*,x_2^*}$$

Eftersom $u(x_1,x_2) - \bar{u})$ er uafhængig af $p$ er det sidste led lig 0 og således har vi fundet Sheppards lemma:

$$\frac{\partial e(p_1,p_2,u)}{\partial p_i} = x_i|_{x_1^*,x_2^*} = h_i(p_1,p_2,u),$$

som er et udtryk for, hvor meget ekstra indkomst forbrugeren skal bruge for at bevare nytteniveauet $\bar{u}$ ved en marginal prisstigning.

**Anvendelse af Sheppards lemma** På grund af substitutionseffekter vil udgiftsfunktionen være konkav. Forbrugeren vil substituere mod billigere varer og den ekstra udgift, hun skal bruge for at opretholde sit nytteniveau, vil derfor være aftagende. Dette kan skrives som:

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i^2} \leq 0.$$

Givet Sheppards lemma kan vi skrive

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i^2} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial h_i(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} \leq 0,$$

altså er den kompenserede efterspørgsel efter vare $i$ aftagende i prisen, som tidligere vist. Med andre ord er substitutionseffekten negativ.

**Roys identitet** Tilsvarende eksemplet ovenfor med nytteminimering kan man gøre for nyttemaksimering, hvorved vi finder Roys identitet givet som:

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p},I)/\partial \mathbf{p}}{\partial v(\mathbf{p},I)/\partial I} = \xi_i(\mathbf{p},I)$$

Vi ser således, at kender vi forbrugerens indirekte nyttefunktion, kan vi udlede hendes efterspørgselsfunktion.

**Slutsky-ligningen** Vi vil gerne finde et udtryk for den totale effekt, som følge af en marginal prisstigning. Vi bruger derfor udtrykket fra tidligere: $h_i(\mathbf{p},u) = \xi_i(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u))$ og differentierer mht. $p_j$. Da finder vi, at (hvor vi bruger, at $I = e(\mathbf{p},u)$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i(\mathbf{p},u)}{\partial p_j} &= \frac{\partial \xi(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u))}{\partial p_j} + \frac{\partial \xi(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u))}{\partial I}\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_j} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \xi(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u))}{\partial p_j} &= \frac{\partial h_i(\mathbf{p},u)}{\partial p_j} - \frac{\partial \xi(\mathbf{p},e(\mathbf{p},u))}{\partial I}\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_j} \end{aligned}$$

hvor første led er et udtryk for substitutionseffekten (se anvendelse af Sheppards lemma) og andet led efter minus er et udtryk for indkomsteffekten.

Vi ved at substitutionseffekten er ikke-positiv, samt at ændringen i udgiftsfunktionen som følge af en prisstigning er positiv (dvs. $\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_j} \geq 0$). For $i = j$ ser vi, at hvis vare $i$ er et normalt gode (så $\frac{\partial h_i(\mathbf{p},u)}{\partial p_j} > 0$), da må den samlede effekt være negativ. Dette er en formaliseret version af 'law of demand'.

## 2 Producentens problem

**Produktionsfunktioner** Beskriver det maksimale, mulige output for en given mængde inputs og er en matematisk karakteristik af produktionsmulighedsområdets rand. Det antages, at den øvre niveaumængde er konveks, hvilket medfører at produktionsfunktionen er kvasikonkav (svagere end at antage at produktionsområdet er konvekst).

**Produktionsmulighedsområdet** Beskriver de mulige produktioner ved en given kombination af input (for et givet teknologiniveau). Input kan med fordel ofte indregnes negativt.

**Isokvanter** En mængde af inputkombinationer, der giver samme mængde output (for et givet teknologiniveau).

**Marginalprodukt, MP** Stigningen i output, som følge af en lille ændring i input. Givet som: $MP_{x_1} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, hvor $f$ er en given produktionsfunktion.

**Teknisk substitutionsforhold, TRS** (eller marginalt (teknisk) substitutionsforhold, MRS) Beskriver forholdet som input kan substitueres med hinanden uden at ændre output. Beskriver hældningen på *isokvanterne*. Givet som

$$TRS(x_1,x_2) = -\frac{MP_{x_1}}{MP_{x_2}}$$

For en produktion med et input og et output, tenderer man til at sige $MP = MRS$.

**Skalaafkast** For kvasikonkave produktionsfunktioner kan skalaafkast være både stigende, faldende og konstant. Produktionsfunktioner er kvasikonkave, hvis den *øvre niveaumængde* er konveks. Antager man derimod at *produktionsmulighedsområdet* (husk, det er området, der ligger *under* produktionsfunktionen) er konvekst, så er produktionsfunktionen er konkav, og der kan der ikke være voksende skalaafkast. Bemærk, at konkavitet medfører kvasikonkavitet, men ikke omvendt. Se evt. lektionsnote 10 og afsnit 6.1.

**Konstant skalaafkast** Ved konstant skalaafkast er profitten lig 0, hvilket betyder at indtægter lig omkostninger. Vi kan vise dette ved at antage, at der er positiv profit, så $\pi > 0$. For to inputvarer betyder dette, at $\pi = py - q_1 z_1 + q_2 z_2 > 0$, hvor $q_i$ er inputpriser, $y$ er output og $p$ outputpris.

Da der er konstant skalaafkast vil for $t > 1$ gælde, at $ty(z_1,z_2) = y(tz_1,tz_2)$, altså $tpy - tq_1 z_1 + tq_2 z_2 = t \cdot \pi > \pi$, hvilket betyder, at vi ikke har profitmaksimeret. Dette er en modstrid og altså må $\pi = 0$. ($\pi \not< 0$ da virksomheden i så fald ikke ville producere)

**Målsætning** Denne antages som oftest at være profitmaksimering.

**Omkostningsfunktioner** Beskriver den billigste kombination af input, der producerer en given mængde output.

**Isokostlinier** Den samlede mængde af input-kombinationer, der producerer en given mængde output. Udgiftsminimering findes ved at vælge den laveste isokostlinie til en given mængde output. (Opfyldes når de relative priser er lig MRS el. TRS)

**Ekspansionsvej** For ethvert outputniveau findes den laveste isokostlinie (svarende til den laveste omkostning). Mængden af disse punkter kaldes ekspansionsvejen og aflæses den faktiske omkostning findes omkostningskurven

**Faktorpriser** Priser på input.

**Producentens problem** To mulige fremgangsmåder:

**Maksimer profit** At optimere profit $\pi$ givet en produktionsfunktion, med inputpriser $q_i$:

$$\max_{y,x_1,x_2} py - q_1x_1 - q_2x_2 \text{ u.b. } y \leq f(x_1,x_2)$$
$$\Leftrightarrow \max_{x_1,x_2} p_y f(x_1,x_2) - q_1x_1 - q_2x_2$$

Optimale inputbestemmelser findes ved at løse førsteordens betingelser. Vær opmærksom på randløsninger. Er produktionsfunktionen konkav vil løsningen altid være entydig. Efterspørgselsfunktionerne efter input indsættes i output-funktionen, hvorved det optimale output findes. Herved kan man finde den samlede profit.

**Omkostningsminimering** For et givet outputniveau minimeres omkostninger:

$$\min_{x_1,x_2} q_1x_1 - q_2x_2 \text{ u.b. } y = f(x_1,x_2)$$

Da fås de betingede input-efterspørgsler, som kan indsættes i omkostningsfunktionen $C(q_1,q_2,y) = q_1x_1(q_1,q_2,y) - q_2x_2(q_1,q_2,y)$.

Efterfølgende kan man finde det optimale outputniveau:

$$\max_{y} p_y y - C(q_1,q_2,y),$$

hvorved fremkommer output-udbudsfunktionen. Inputsefterspørgsels-funktionerne kan findes ved indsættelse af denne.

Man har således fundet at udgiftsminimering svarer til profitmaksimering. Præcis som for forbrugerteorien.

**Profitmaksimering og udbud** Profitmaksimering opfylder, at $p = MC$. De marginale omkostninger (når disse er større end de gennemsnitlige omkostninger AC) er lig virksomhedens udbud.

**Efterspørgsel efter input** Vi kan ved hjælp af den profitmaksimerende betingelse finde virksomhedens efterspørgsel efter input. Denne vil altid være faldende, da en stigning i pris som følge af substitutionseffekten vil få efterspørgslen til at falde. Det samme vil mængdeeffekten.

**Hotellings lemma** Man kan analogt til forbrugerteori anvende Envelope Theorem igen på en profitfunktion $\pi(p,q_1,...,q_n)$, hvor $q_i$ er inputpriser. Alternativt kan man maksimere $\pi$ givet $y = f(x_1,...,x_n)$ og anvende Shephards lemma, hvor $f$ er en produktionsfunktion. Hotellings lemma er:

$$\frac{\partial\pi(p,q_1,...,q_n)}{\partial p} = y(p,q_1,...,q_n) \geq 0, \quad \frac{\partial\pi(p,q_1,...,q_n)}{\partial q_1} = x_1(p,q_1,...,q_n) \leq 0$$
$$\ldots \quad \frac{\partial\pi(p,q_1,...,q_n)}{\partial q_n} = x_n(p,q_1,...,q_n) \leq 0$$

Vi har her ikke vist, at udbudskurven er stigende og efterspørgslen er faldende, men vi har intuitivt beskrevet sidstenævnte tilfælde ovenfor.

**Kort og lang sigt** På kort sigt vil visse udgifter være faste. Det betyder, at man ved profitmaksimering ikke skal tage højde for disse. Man kan således ved udgiftsminimering finde omkostningsfunktionen på lang sigt (inddrager alle omkostninger) eller på kort sigt (inddrager kun variable) omkostninger. Dette giver på kort sigt anledning til skelnen mellem samlede udgifter (expenditures) og økonomiske omkostninger.

På kort sigt kan profitten være negativ, som følge af en sunk cost. Virksomheden forsøger da at minimere underskud.

**Grænseomkostninger** Givet ved $MC = \frac{\partial C(y,\mathbf{q})}{\partial y}$. Bemærk, at der findes ikke 'variable' marginalomkostninger

# 3 Partiel ligevægt

**Kompetitiv ligevægt** (el. partiel ligevægt) I ligevægt er markedsudbud lig med markedsefterspørgsel. Dette gælder på lang sigt, hvor virksomheder kan forlade eller gå ind på markedet. Det følger som konsekvens af, at er der positiv profit vil flere virksomheder gå på markedet indtil udbudsprisen er lig minimum af de gennemsnitlige omkostninger (og profit er lig 0).

**Aggregeret efterspørgsel (vandret addition)** For $n$ forbrugere er markedsefterspørgslen givet som: $D^M(p) = \sum_{i=1}^n x^i(p)$

**Aggregeret udbud** For $j$ virksomheder er markedsudbuddet givet som $S^M(p) = \sum_{i=1}^j s^i(p)$

**Komparativ statik** For eksempler på komparativ statik henvises til Nechyba: 'Microeconomics', kap 14.A.3.

# 4 Generel ligevægt

**Bytteøkonomi** En økonomi, hvor der ingen produktion er, men hvor hver forbruger $i$ har en initialbeholdning $\omega_i$ til salg, som er udbuddet. I en bytteøkonomi udgøres de Pareto-efficiente allokeringer ved kontrakt-kurven.

**Walras-ligevægt** I ligevægt vil priserne tilpasse sig, så to betingelser er opfyldte:

1. (individuel optimering) hver forbruger $i$ vælger således, at $p \cdot x_i^0 = p \cdot \omega_i$ og hvis $u_i(x_i) > u_i(x_i^0)$, så er $p \cdot x_i^0 > p \cdot \omega_i$.
2. (balance på varemarkederne) $\sum_{i=1}^m x_i^0 = \sum_{i=1}^m \omega_i$

Vi har således givet, at forbrugernes budgetbetingelser er bestemt af forbrugernes initialbeholdninger.

Ligevægtspriserne definerer en (budget-)linje med hældning $-p_1^*/p_2^*$ gennem den initiale beholdning og ligevægten må ifølge betingelse 1 være et punkt på denne linje. I Walras-ligevægten har vi, at indifferenskurverne tangerer denne linje. Man bør hernæst undersøge (og kommentere) på om ligevægten er entydig.

Bemærk, at i en Edgeworth-box modellerer vi to varer med to forbrugere. Begge har klart markedskraft, men dette accepteres, da vi kan udvide modellen til vilkårligt mange forbrugere og vare (omend ikke grafisk fremstille dette).

**Fremgangsmåde** For at finde en Walras-ligevægt gøres følgende:

1. Find forbrugernes efterspørgsler
2. Find forbrugernes indkomster (givet ved initialbeholdninger)
3. Løs relationen 'samlet efterspørgsel lig samlede ressourcer'
4. Find ligevægtsallokeringen ved at indsætte ligevægtspriser

**Allokering** Et sæt af forbrugsbundter $(x_1,...x_m)$ for hver forbruger, som opfylder betingelse 2, så der bliver forbrugt det, som er til rådighed.

**Numeraire** Bemærk, at hvis $p_1^*$,$p_2^*$ er løsning, da er $tp_1^*$,$tp_2^*$ for alle $t > 0$ også løsning. Man kan således kun opnå ligevægt for relative priser og derfor laves typisk pris-normalisering. Hvis vi sætter $p_2 = 1$, da kaldes $p_2$ *numeraire*.

**Koopmans-økonomi** Økonomi med en producent og en forbruger med to varer, hvor den ene er et forbrugsgode og det andet er både input i produktionen af første gode samt forbrugsgode. Bemærk, at vi her regner input negativt og output positivt.

Man vil her nytte- og profitmaksimere, når forbrugerens efterspørgsel efter forbrugsgodet er lig virksomhedens udbud og virksomhedens efterspørgsel efter godet, der indgår i produktionen er lig forbrugerens udbud. Der er kun én paretooptimal allokering i en Koopmans-økonomi med en forbruger og en producent.

**Fremgangsmåde** Følgende trin følges:

1. Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem (find udbud af forbrugsgode og profit)
2. Løs forbrugerens nyttemaksimeringsproblem og find det optimale forbrug.
3. Opstil 'efterspørgsel lig udbud' kun nødvendigt på 1 marked, hvis der er 2. Det andet clearer også som følge af Walras' lov.

4. Find produktionsplan og forbrug i ligevægt ved at indsætte ligevægtspriser i løsningen til profitmaksimerings- og nyttemaksimeringsproblemet.

**Pareto-optimalitet** En allokering er Pareto-efficient (Pareto-optimal), hvis der *ikke* findes en anden allokation, der er mindst lige så god for begge forbrugere og strengt bedre for den ene forbruger. Altså $(x_{1i},x_{2i})$ Pareto-efficient, hvis der for de to forbrugere 1 og 2 ikke findes en anden allokering $(y_{1i},y_{2i})$ hvorom det gælder, at:

$$[u_1(y_{1i}) \geq u_1(x_{1i}) \wedge u_2(y_{2i}) > u_2(x_{2i})] \vee [u_1(y_{1i}) > u_1(x_{1i}) \wedge u_2(y_{2i}) \geq u_2(x_{2i})]$$

for goderne $i \in \mathbb{R}_+$

Grafisk tangerer de to indifferenskurver for de to forbrugere hinanden i en Pareto-efficient allokering, så $MRS_1 = MRS_2$. Løses ved at maksimere nytten for forbruger 1, for en given nytte af forbruger 2. (Anvend, at forbruger 2's efterspørgsel efter et givent gode er differencen mellem de samlede initialbeholdninger for forbruger 1's efterspørgsel).

**Kontraktkurven** Den kurve i et Edgeworth-diagram, der opfylder $MRS_1 = MRS_2$ for to forbrugere. Intuitivt er dette et udtryk for, at hvis forbrugernes marginale substitutionsforhold afviger fra hinanden, da ville de kunne lave et lille bytte, der kunne stille dem bedre.

**Walras' lov** Hvis $m-1$ markeder 'clearer', vil marked $m$ også cleare. Dette kan anvendes til at tjekke, om man har regnet rigtigt.

**Overskudsefterspørgsel** Funktionen er givet som: $\zeta_i(p) = \xi(p,p \cdot \omega_i) - \omega_i$, hvor $p \cdot \omega_i$ er forbrugerens indkomst givet ved initialbeholdning. Det er et udtryk for den *nettohandel*, forbrugeren gennemfører.

Den aggregerede overskudsefterspørgselsfunktion er givet: $\zeta(p) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i(p)$, og har den vigtige egenskab, at $p \cdot \zeta(p) = 0$ (hvor vi husker, at $p$ er en prisvektor). Summen af værdien af nettohandler er således 0 for hele økonomien.

Walras' lov følger som konsekvens af, at forbrugerne bruger hele deres indkomst, så $p \cdot \xi(p,p \cdot \omega_i) = p \cdot \omega_i$

**Tâtonnement-proces** En form for tilpasning, når priserne ikke er ligevægt. Man siger, at ændringen i priserne over tid er givet ved: $\frac{dp_h}{dt} = a_h \zeta_h(p)$, hvor $a_h$ er tilpasningshastigheden. Bemærk, at ingen handler gennemføres, mens der tilpasses, da overskudsefterspørgslen så ville ændre sig. Denne form for tilpasning er urealistisk og sker kun under bestemte antagelser.

**Kernen** Kernen er de Pareto-efficiente allokeringer, der ligger i den foretrukne mængde for to forbrugere, givet en bestemt initialbeholdning.

En allokering $x_i$ ligger i kernen, hvis der ikke er nogen koalition $S \subseteq \{1,...,m\}$ af forbrugerne, der ved at slå sig sammen, kan opnå noget bedre med egne ressourcer, dvs. finde $x'_i$ for $i \in S$ så

$$u_i(x'_i) > u_i(x_i) \text{ og } \sum_{i \in S} x'_i = \sum_{i \in S} \omega_i$$

## 5 Velfærdsteori

**1. hovedsætning** *"Under bestemte betingelser giver kompetitive markeder efficiente udfald."*.

Dette indses lettest ved at betragte den aggregerede kompenserede efterspørgsel og den aggregerede udbudskurve grafisk. Der hvor markedet er i ligevægt vil den samlede velfærd være maksimeret. Igennem priser koordinerer de enkelte aktører på markedet sig, så der opnås det størst mulige velfærd.

Betingelserne, hvorunder den 1. hovedsætning gælder, er, at der ikke må være prisforstyrelser, som følge af en markedsforvridning, der er privat ejendomsret (og dermed ingen eksternaliteter), der er ikke asymmetrisk informtion og alle aktører er små (og ingen dermed har markedskraft).

**2. hovedsætning** *"Enhver Pareto-efficient allokering kan opnås som en Walras-ligevægtsallokation efter omfordeling af ressourcerne i økonomien."*

Ved at ændre i initialbeholdningen (uden velfærdstab) kan vi opnå enhver ligevægt. Denne hovedsætning gælder kun, hvis det anages, at øvre niveaumængder og produktionsmulighedsområdet er konvekse (hvorfor vi indførte disse antagelser), da man så kan adskille de to mænger med en (pris-)linje.

**Bevis for at Walras ligevægt er Pareto-optimal** Lad være givet en Walras-ligevægt ved $p_1^*, p_2^*$ og $(x_{11}^*, x_{12}^*)$, $(x_{21}^*, x_{22}^*)$. Antag, at denne allokering ikke er Pareto-efficient. Da findes der en allokering $(y_{11}, y_{12})$, $(y_{21}, y_{22})$, så

$$[u_1(y_{11}, y_{12}) > u_1(x_{11}^*, x_{12}^*)] \wedge [u_2(y_{21}, y_{22}) \geq u_u(x_{21}^*, x_{22}^*)]$$

Som følge af vores antagelser om præferencer finder vi således, at:

$$[p_1^* y_{11} + p_2^* y_{12} > p_1^* x_{11}^* + p_2^* x_{12}^*] \wedge [p_1^* y_{21} + p_2^* y_{22} \geq p_1^* x_{21}^* + p_2^* x_{22}^*]$$

Da må

$$\begin{aligned} p_1^* y_{11} + p_2^* y_{12} + p_1^* y_{21} + p_2^* y_{22} &> p_1^* x_{11}^* + p_2^* x_{12}^* + p_1^* x_{21}^* + p_2^* x_{22}^* \\ \Leftrightarrow p_1^* E_1 + p_2^* E_2 &> p_1^* E_1 + p_2^* E_2, \end{aligned}$$

hvilket er en modstrid. Altså må Walras-ligevægten være Pareto-efficient.

**Repræsentativ forbruger** Vi siger, at en gruppe af forbrugere kan modeleres som en repræsentativ forbruger, hvis gruppen opfører sig som et *enkelt* individ.

**Efterspørgsel på Gorman form** Den eneste efterspørgselsfunktion, der overholder, at indkomstændringer indenfor en gruppe af forbrugere ikke påvirker det overordnede forburg er funktioner på Gorman form:

$$\begin{aligned} x_i^m(p_1, p_2, I^m) &= a_i^m(p_1, p_2) + I^m b_i(p_1, p_2) \\ x_i^n(p_1, p_2, I^n) &= a_i^n(p_1, p_2) + I^n b_i(p_1, p_2), \end{aligned}$$

hvor $a_i^m$ og $a_i^n$ er personspecifikke ($m$, $n$) og varespecifikke ($i$), mens $b_i$ kun er varespecifik. Dette kunne eksempelvis være kvasilineære præferencer.

**Consumer surplus** Grafisk er dette arealet der afgrænses af den *kompenserede* efterspørgsel (el. MWTP-kurven), den vandrette linje givet ved prisen og 2.-aksen. Man kan tilnærmelsesvis sammenligne det med arealet til venstre for den ukompenserede efterspørgsel. Vi benytter den ukompenserede efterspørgsel, da prisen, man er villig til at betale for et gode – i modsætning til den ukompenserede efterspørgsel – ikke afhænger af indkomsteffekter, men udelukkende substitutionseffekter som følge af, at varen er blevet relativt dyrere.

Ændringen i forbrugeroverskuddet som følge af en stigning i $p_1$ udregnes som: $I - e(p_1^e, p_2, u^f) = e(p_1^f, p_2, u^f) - e(p_1^e, p_2, u^f)$.

**Producer surplus** (el. profit) Er givet som samlede indtægter fratrukket de samlede omkostninger, også kendt som profit. Det er således arealet til venstre for virksomhedens udbudskurve.

# 6 Diverse

**Ordinal** En ordinal funktion er transitiv (et punkt er bedre end et andet), men funktionsværdierne har ikke intrinsisk værdi.

**Kardinal** Værdier i en kardinalfunktion har værdi i sig selv (så nytte 10 er dobbelt så godt som nytte 5).

## 6.1 Homogenitet og homotecitet

En funktion $f$ kaldes homogen af grad $k$, hvis det gælder for alle $t > 0$, at:

$$f(tx_1, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ... x_n)$$

En økonomisk anvendelse af dette er, at en produktionsfunktion, der er homogen af grad $k = 1$, udviser konstant skalaafkast. En produktionsfunktion, der er homogen af grad $k > 1$, udviser stigende skalaafkast og en produktionsfunktion, der er homogen af grad $k < 1$, udviser aftagende skalaafkast.

Enhver homogen funktion af grad $k$ kan blive omdannet til en homogen funktion af grad $k = 1$ ved at opløfte funktionen i potensen $1/k$.

**CES-funktioner og homogenitet** En CES-funktion givet som $A(a_1 x_1^p + a_2 x_2^p)^{\frac{p}{q}}$ er homogen af grad $k = q$. Tilsvarende er en Cobb-Douglas funktion $q(x_1, ..., x_n) = Ax^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$ homogen af grad $k = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

**Efterspørgselsfunktioner** Efterspørgselsfunktioner udledt fra nyttefunktioner er homogene af grad $k = 0$. Ændrer pris og indkomst sig med en faktor $t$ påvirker det ikke efterspørgslen. Altså gælder for en efterspørgselsfunktion $x = \xi(p_1, ... p_n, I)$, at:

$$\xi(tp_1, ..., tp_2, tI) = t^0 \xi(p_1, ... p_n, I) = \xi(p_1, ... p_n, I)$$

Dette indses ved at maksimere $u(x)$ under bibetingelse af $tx_1 p_1 + ... tx_n p_n = tI$, hvilket giver det samme som at maksimere $u(x)$ givet $x_1 p_1 + ... x_n p_n = I$

**Monoton transformation** Lad $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være en funktion. Den monotone transformation er givet som $g \circ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, hvor $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en strengt voksende funktion. Her er $u$ og $g \circ u$ ordinalt set ækvivalente og bekriver (hvis der er tale om nyttefunktioner) de samme præferencer, men tildeler dem forskellige værdier.

Bemærk desuden, at en monoton transformation af en given nyttefunktion ikke ændrer udtrykket for efterspørgselsfunktionen, da MRS ikke påvirkes af en monoton transformation (se MRS).

**Homotetisk funktion** En funktion kaldes homotetisk, hvis den kan beskrives som en monoton transformation af en homogen funktion. Altså kaldes $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homotetisk, hvis den kan skrives som $v = g \circ u$, hvor $g$ er en strengt voksende funktion (som beskrevet ovenfor) og $u$ er en homogen funktion. **Eksempel:** Givet den homogene funktion $u(x,y) = xy$, da er $v = u + 1$ en homotetisk (men ikke homogen) funktion.[1]

Nyttefunktioner, der er homotetiske vil desuden have konstant MRS i rette linjer fra origo.

[1] Link til artikel om homogene og homotetiske funktioner i økonomi